A 2001 Math MP 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE, DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS, DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière STI).

CONCOURS D'ADMISSION 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière MP

(Durée de l'épreuve : 3 heures)
(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle International, ENSTIM, ENSAE (Statistique), INT, TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière MP.

Cet énoncé comporte 6 pages de texte.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout ce problème l'entier n est supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$) ; E est un espace vectoriel complexe de dimension n. Le but de ce problème est d'étudier les applications semi-linéaires de l'espace vectoriel complexe E dans lui-même. Une application u de E dans lui-même est semi-linéaire si elle possède la propriété suivante :

Pour tout scalaire a et tout couple de vecteurs x et y de l'espace vectoriel E la relation ci-dessous est vérifiée :

$$u(a\,x+y) = \bar{a}\,u(x) + u(y).$$

Le nombre complexe $\bar{a}$ est le nombre complexe conjugué de a.

Un nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u s'il existe un vecteur x différent de 0 tel que la relation ci-dessous soit vérifiée :

$$u(x) = \mu\,x.$$

Le vecteur x est un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre μ.

Tournez la page S.V.P.

Première partie

Le but de cette partie est d'étudier, pour une application semi-linéaire u donnée, les valeurs et vecteurs co-propres.

I-1. Premières propriétés.

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E.

a. Démontrer qu'étant donné un vecteur x, différent de 0, appartenant à l'espace E, il existe au plus un nombre complexe μ tel que la relation $u(x) = \mu x$ ait lieu.

b. Démontrer que, si le nombre complexe μ est une valeur co-propre de l'application semi-linéaire u, pour tout réel θ, le nombre complexe $\mu e^{i\theta}$ est encore valeur co-propre de l'application semi-linéaire u. Exprimer un vecteur co-propre associé à la valeur co-propre $\mu e^{i\theta}$ en fonction d'un vecteur co-propre x associé à la valeur co-propre μ et du réel θ.

c. Étant donnée une valeur co-propre μ de l'application semi-linéaire u, soit E_μ l'ensemble des vecteurs x de l'espace vectoriel E qui vérifient la relation $u(x) = \mu x$:

$$E_\mu = \{x \in E \mid u(x) = \mu x\}.$$

Est-ce que l'ensemble E_μ est un espace vectoriel complexe ? réel ?

d. Étant données deux applications semi-linéaires u et v, étudier la linéarité de l'application composée $u \circ v$.

I-2. Matrice associée à une application semi-linéaire :

Soit u une application semi-linéaire de l'espace vectoriel E ; soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de l'espace vectoriel E. À un vecteur x, de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est associée une matrice-colonne X d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$, appelée (abusivement) vecteur.

a. Démontrer qu'à l'application semi-linéaire u est associée dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E une matrice A, carrée, complexe, d'ordre n, telle que la relation $y = u(x)$ s'écrive :

$$Y = A\overline{X}.$$

La matrice-colonne $\overline{X}$ est la matrice complexe conjuguée de la matrice-colonne X.

b. Soient A et B les matrices associées à une même application semi-linéaire u dans les bases $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ respectivement. Soit S la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ à la base $(f_i)_{1\leq i\leq n}$. Exprimer la matrice B en fonction des matrices A et S.

Étant donnée une matrice carrée A, complexe, d'ordre n, le vecteur X, différent de 0, $(X \neq 0)$ est un vecteur co-propre de la matrice carrée A, associé à la valeur co-propre μ, si le vecteur X et le nombre complexe μ vérifient la relation matricielle ci-dessous :

$$A\overline{X} = \mu X.$$

Dans la suite toutes les matrices considérées sont des matrices carrées complexes.

I-3. Exemples :

a. Soit A la matrice d'ordre 2 définie par la relation suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Rechercher les valeurs co-propres μ et les vecteurs co-propres $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associés.

b. Démontrer que, si une matrice A est réelle et admet une valeur propre réelle λ, cette matrice a au moins une valeur co-propre.

I-4. Correspondance entre les valeurs co-propres de la matrice A et les valeurs propres de la matrice $A\overline{A}$:

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n.

a. Démontrer que, si le scalaire μ est une valeur co-propre de la matrice A, le nombre réel $|\mu|^2$ est une valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

b. Soit λ une valeur propre positive ou nulle ($\lambda \geq 0$) de la matrice $A\overline{A}$ et X un vecteur propre associé :

$$A\overline{A}X = \lambda X.$$

Démontrer que le réel $\sqrt{\lambda}$ est une valeur co-propre de la matrice A en envisageant les deux cas suivants :

i. les vecteurs $A\overline{X}$ et X sont liés ;

ii. les vecteurs $A\overline{X}$ et X sont indépendants ;

c. En déduire que, pour que le réel positif ou nul μ soit valeur co-propre de la matrice A, il faut et il suffit que le réel μ^2 soit valeur propre de la matrice $A\overline{A}$.

I-5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure :

Dans cette question la matrice A est une matrice triangulaire supérieure (les éléments situés en-dessous de la diagonale principale sont nuls).

a. Démontrer que, si λ est une valeur propre de la matrice A, pour tout réel θ, le nombre complexe $\lambda\, e^{i\theta}$ est une valeur co-propre de la matrice A.

b. Démontrer que, si μ est une valeur co-propre de la matrice A, il existe un réel θ tel que le nombre complexe $\mu\, e^{i\theta}$ soit valeur propre de la matrice A.

c. Soit A la matrice définie par la relation ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le réel 1 est valeur co-propre de cette matrice et déterminer un vecteur X co-propre associé. Poser : $X = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}$.

Tournez la page S.V.P.

I-6. Une caractérisation des valeurs co-propres :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n ; soient B et C les matrices réelles définies par la relation suivante :

$$A = B + i\,C.$$

Démontrer que le nombre complexe μ est valeur co-propre de la matrice A si et seulement si le nombre réel $|\mu|$ est une valeur propre de la matrice D, carrée réelle d'ordre $2n$, définie par blocs par la relation suivante :

$$D = \begin{pmatrix} B & C \\ C & -B \end{pmatrix}.$$

Seconde partie

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, s'il existe une matrice carrée complexe S d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbf{C})$) telle que la relation

$$B = S.A.\overline{S}^{-1}$$

soit vérifiée, les deux matrices A et B sont dites co-semblables. Si une matrice A est co-semblable à une matrice diagonale, la matrice A est dite co-diagonalisable. Le but de cette partie est de rechercher à quelles conditions une matrice est co-diagonalisable.

II-1. Une relation d'équivalence :

Étant données deux matrices carrées complexes A et B d'ordre n, ces matrices sont dites satisfaire la relation $\approx$ si et seulement si ces deux matrices sont co-semblables :

$$A \approx B \Leftrightarrow \exists S \in GL_n(\mathbf{C}) : B = S.A.\overline{S}^{-1}.$$

Démontrer que la relation $\approx$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des matrices carrées complexes d'ordre n.

II-2. Indépendance des vecteurs co-propres :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n, soient $X_1, X_2, ..., X_k$, k vecteurs co-propres de la matrice A associés à des valeurs co-propres $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$; l'entier k est inférieur ou égal à l'entier n ($k \leq n$).

Démontrer que, si les valeurs co-propres μ_p, $p = 1, 2, ..., k$ ont des modules différents les uns des autres ($p \neq q \Rightarrow |\mu_p| \neq |\mu_q|$), la famille $(X_1, X_2, ..., X_k)$ est libre.

En déduire que, si la matrice $A.\overline{A}$ a n valeurs propres $\lambda_p, p = 1, 2, ..., n$, positives ou nulles, ($\lambda_p \geq 0$), distinctes les unes des autres ($p \neq q \Rightarrow \lambda_p \neq \lambda_q$), la matrice A est co-diagonalisable.

II-3. Quelques propriétés :

a. Soit S une matrice carrée complexe d'ordre n inversible ($S \in GL_n(\mathbf{C})$) ; soit A la matrice définie par la relation

$$A = S.\overline{S}^{-1}.$$

Calculer la matrice produit $A.\overline{A}$.

b. Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n telle que

$$A.\overline{A} = I_n,$$

démontrer qu'il existe au moins un réel θ tel que la matrice $S(\theta)$ définie par la relation ci-dessous

$$S(\theta) = e^{i\theta} A + e^{-i\theta} I_n,$$

soit inversible. Calculer, en donnant au réel θ cette valeur, la matrice $A.\overline{S(\theta)}$; en déduire la matrice $S(\theta).\overline{S(\theta)}^{-1}$.

II-4. Une condition nécessaire :

Soit A une matrice d'ordre n co-diagonalisable. Il existe par suite une matrice S inversible telle que la matrice $S^{-1}.A.\overline{S}$ soit diagonale. Démontrer que la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont positives ou nulles et que le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

II-5. Une condition suffisante :

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n qui vérifie les trois propriétés suivantes :

i. la matrice $A.\overline{A}$ est diagonalisable,
ii. les valeurs propres de la matrice $A.\overline{A}$ sont positives ou nulles,
iii. le rang de la matrice A est égal au rang de la matrice $A.\overline{A}$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, les valeurs propres, deux à deux distinctes, de la matrice $A.\overline{A}$; elles sont positives et ordonnées de façon qu'elles vérifient la relation suivante :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_k \geq 0.$$

Les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ont respectivement les multiplicités $n_1, n_2, ..., n_k$. Soit I_p la matrice identité d'ordre p. Une matrice diagonale Λ, semblable à la matrice $A.\overline{A}$, s'écrit par blocs avec les conventions précédentes sous la forme suivante :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse il existe une matrice S inversible telle que

$$A.\overline{A} = S.\Lambda.S^{-1}.$$

Soit B la matrice définie par la relation suivante :

$$B = S^{-1}.A.\overline{S}.$$

a. Démontrer les relations :

$$B.\overline{B} = \overline{B}.B \; ; \; B.\Lambda = \Lambda.B.$$

b. Démontrer que la matrice B s'écrit par blocs sous la forme ci-dessous ; dans cette

Tournez la page S.V.P.

expression chaque matrice B_p est une matrice d'ordre n_p :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix}.$$

c. Démontrer qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale Δ d'ordre n telles que la relation ci-dessous ait lieu :

$$B = P.\Delta.P^{-1}.$$

En déduire que toute matrice vérifiant les hypothèses i, ii et iii est co-diagonalisable.

II-6. Exemples :

a. Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; est-elle co-diagonalisable ?

b. Soient A, B, C et D les matrices d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que ces matrices sont diagonalisables ? co-diagonalisables ?

FIN DU PROBLÈME